b) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $V_n = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$.

c) Montrer alors que $(V_n)$ est une suite convergente vers zéro.

## Exercice 13 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!}$

1°/ Montrer que $(U_n)$ est une suite croissante.

2°/ a) Prouver que $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a $U_n \leq 1 - (\frac{1}{2})^n$.

3°/ Montrer que $(U_n)$ est convergente vers un réel $l \in ]\frac{1}{2}, 1[$.

## Exercice 14 :

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1°/a) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \geq 1$.

b) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \leq x$.

2°/ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N})$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$ .

b) Etudier la monotonie de $(u_n)$ .

c) Montrer que $(u_n)$ est convergente et trouver sa limite.

3°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

## Exercice 15 :

$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!}\right)$ , $V_n = U_n + \frac{1}{n.n!}$

1°/ Montrer que $(U_n)$ est croissante et $(V_n)$ est décroissante

2°/ Montrer que $(U_n)$ et $(V_n)$ sont deux suites adjacentes .